Oefeningen bij het vak Automaten

Opgave 1 Geef deterministische automaten die precies de volgende talen herkennen — het alfabet is steeds $\{0,1\}$.

(a) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ zowel } \#_0(w) \text{ als } \#_1(w) \text{ is even}\}$,

(b) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ eindigt op } 0\}$,

(c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ eindigt op } 00\}$,

(d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ elk blok van vijf opéénvolgende symbolen in } w \text{ bevat minstens één } 0\ \}$

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \neq 010 \text{ en } w \neq 101\}$.

Hier betekent $\#_s(w)$ het aantal optredens van het symbool s in het woord w.

Opgave 2 Gegeven is een DEA $\mathbb{A}$. Geef een DEA $\mathbb{B}$ die het complement van $L(\mathbb{A})$ herkent; dat wil zeggen: $\mathbb{B}$ accepteert precies de woorden die niet door $\mathbb{A}$ worden herkend.

Opgave 3 Welke talen over $\{a, b\}$ worden door de volgende automaten herkend?

(a)

$\mathbb{A}_1$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
$*q_1$	q_2	q_1
q_2	q_2	q_1

(b)

$\mathbb{A}_2$	a	b
$\rightarrow q_\epsilon$	q_a	q_ϵ
q_a	q_{aa}	q_ϵ
q_{aa}	q_{aa}	q_{aab}
$*q_{aab}$	q_{aab}	q_{aab}

(c)

$\mathbb{A}_3$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_3
q_1	q_3	q_2
$*q_2$	q_2	q_2
q_3	q_3	q_3

Opgave 4 In een zekere imperatieve programmeertaal **P** kunnen (en moeten) reële getallen op een van de volgende manieren worden gerepresenteerd:

1. een niet-lege cijferreeks (bijvoorbeeld: `24356`);
2. twee niet-lege cijferreeksen gescheiden door een punt (bijvoorbeeld: `3.1416`);
3. een niet-lege cijferreeks, gevolgd door het symbool `E`, mogelijk gevolgd door een minteken (`-`), en zeker gevolgd door een niet-lege cijferreeks (bijvoorbeeld: `15E-4`, `16E238`);
4. een combinatie van 2 en 3, dat wil zeggen: twee niet-lege cijferreeksen gescheiden door een punt (bijvoorbeeld: `3.1416`), gevolgd door het symbool `E`, mogelijk gevolgd door een minteken (`-`), en zeker gevolgd door een niet-lege cijferreeks (bijvoorbeeld: `16.2E-23`).

Geef een eindige automaat die precies deze expressies herkent.

Opgave 5 Geef eindige (niet noodzakelijk deterministische) automaten die de volgende talen herkennen:

(a) $\{w \in \{0,1,\ldots,9\}^* \mid \text{ het laatste cijfer van } w \text{ treedt slechts een keer op}\}$,

(b) $\{w \in \{0,1,\ldots,9\}^* \mid \text{ het laatste cijfer van } w \text{ treedt minstens 2 keer op}\}$,

(c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ er treden twee 0's op die door $4n$—n een natuurlijk getal—symbolen gescheiden worden$\}$.

Opgave 6 Geef deterministische equivalenten van de volgende niet-deterministische automaten:

(a)

$\mathbb{A}_1$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_0, q_1	q_1
$*q_1$	q_2	q_2
q_2	$-$	q_2

(b)

$\mathbb{A}_2$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_0, q_1	q_0
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	$-$
$*q_3$	q_3	q_3

(c)

$\mathbb{A}_3$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1, q_3	q_1
$*q_1$	q_2	q_1, q_2
q_2	q_3	q_0
$*q_3$	$-$	q_0

(d)

$\mathbb{A}_4$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_0, q_1	q_0
q_1	q_2, q_3	q_4
q_2	q_1, q_2, q_4	$-$
q_3	$-$	$-$
$*q_4$	$-$	$-$

Opgave 7 We zeggen dat een woord w *matcht* met een reguliere expressie r als $w \in L(r)$. Onderzoek of de volgende woorden matchen met de expressie $(ab + aa + baa)^*$.

bbaaba, *abaabaaabaa*, *aaaabaaaa*, *baaaaabaa*, *baaaaabaaaab*.

Opgave 8 In UNIX kun je met het commando `ls` alle files in een directory bekijken. Maar het is ook mogelijk alleen maar bepaalde files te laten zien. Hierbij kun je gebruik van de volgende expressies maken:

$$\begin{array}{rcl} ? & \sim & \text{een willekeurig element uit } \Sigma, \\ * & \sim & \text{een willekeurig element uit } \Sigma^*, \\ [n_1..n_2] & \sim & \text{een cijfer tussen } n_1 \text{ en } n_2 \ (n_1 \text{ en } n_2 \text{ zelf meegerekend}), \\ [l_1..l_2] & \sim & \text{(een letter tussen } l_1 \text{ en } l_2 \ (l_1 \text{ en } l_2 \text{ zelf meegerekend}). \end{array}$$

Het alfabet Σ is daarbij als volgt gedefineerd:

$$\Sigma := \{a, b, \ldots, z\} \cup \{A, B, \ldots, Z\} \cup \{0, \ldots, 9\} \cup \{., -\}$$

Schrijf de volgende UNIX-expressies als reguliere expressies:

(a) [2..6]?

(b) $*$

(c) $*[k..z]$

Opgave 9 Geef reguliere expressies voor de volgende talen in $\{a, b\}$:

(a) $\{w \mid |w| = 2\}$

(b) $\{w \mid |w| > 2\}$

(c) $\{awa \mid w \in \{a,b\}^*\}$

(d) $\{w \mid w \neq aba, w \neq bab\}$

(e) $\{w \mid \#_a(w)$ is een drievoud $\}$

(f) $\{w \mid \#_a(w)$ is geen drievoud $\}$

(g) $\{w \mid w$ eindigt niet op $ab\}$

(h) $\{w \mid w$ heeft aba niet als deelstring $\}$

Opgave 10 Welke talen worden door de volgende expressies weergegeven?

(a) $(1+\epsilon)(00^*1)^*0^*$

(b) $(0^*1^*)^*000(0+1)^*$

(c) $(0+10)^*1^*$

Opgave 11 Gegeven is het alfabet $\Sigma = \{0,1\}$. Welke talen worden weergegeven door de volgende expressies?

0, $\varnothing$, ϵ, 0^*, $\varnothing^*$, ϵ^*, $(0\varnothing)^*$.

Opgave 12 Gegeven is een alfabet Σ, en reguliere expressies r en s over Σ. Ga na of de volgende reguliere expressies paarsgewijs equivalent zijn. Verklaar uw antwoord!

(a) rr^* en r^*r

(b) $(r+s)^*$ en r^*+s^*

(c) $(r+s)^*$ en $(r^*s^*)^*$

(d) $(r+s)^*$ en $(rs^*)^*$

(e) de UNIX-expressies $[a..c+b..f]*$ en $[a..f]*$

(f) de UNIX-expressies $*$ en $*?$

Opgave 13 Geef reguliere expressies voor de talen die worden herkend door de vier automaten gegeven door onderstaande tabellen:

(a)

$\mathbb{A}$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
$*\ q_2$	q_2	q_1

(b)

$\mathbb{A}$	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
$*\ q_2$	q_1	q_0

(c)

$\mathbb{A}$	a	b
$* \rightarrow \quad p$	s	p
q	p	s
r	r	q
s	q	r

(d)

$\mathbb{A}$	a	b
$\rightarrow \quad q_0$	q_0, q_1	q_2
q_1	q_2	q_1
$* \quad q_2$	q_2	q_0, q_1, q_2

Opgave 14 Geef DEA's voor de volgende ϵ-NEA over de taal $\{a, b, c\}$:

(a)

$\mathbb{A}_0$	ϵ	a	b	c
$\rightarrow \quad q_0$	$-$	q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_1	q_2	$-$
$* \quad q_2$	q_1	q_2	$-$	q_0

(b)

$\mathbb{A}_1$	ϵ	a	b	c
$\rightarrow \quad q_0$	q_1, q_2	$-$	q_1	q_2
q_1	$-$	q_0	q_2	q_0, q_1
$* \quad q_2$	$-$	$-$	$-$	$-$

Opgave 15 Construeer ϵ-NEA's voor de volgende reguliere expressies:

(a) ab^*

(b) $(a + b)ab$

(c) $aa(a + b)^*$

(d) $(\epsilon + b)^*aab^*$

Opgave 16 Geef DEA's voor de volgende reguliere expressies:

(a) $aa^* + aba^*b^*$

(b) $ab(a + ab)^*(a + aa)$

Opgave 17 Gegeven is een eindige automaat $\mathbb{A}$. Geef een eindige automaat $\mathbb{B}$ zó dat $L(\mathbb{B}) = \{ww \mid w \in L(\mathbb{A})\}$.

Opgave 18 Gegeven is een reguliere taal L over het alfabet Σ, en een NEA $\mathbb{A}$ die L herkent. Beschouw nu de taal $\tilde{L}$ die precies bestaat uit de woorden van L waaraan één extra symbool is toegevoegd. Preciezer:

$$\tilde{L} := \{uav \mid uv \in L, a \in \Sigma\}.$$

Werk de NEA $\mathbb{A}$ om tot een NEA $\tilde{\mathbb{A}}$ die $\tilde{L}$ herkent.

Opgave 19 Laat zien dat de volgende talen niet regulier zijn:

(a) $L_b = \{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$,

(b) $L_c = \{(ab)^k c^m \in \{a, b, c\}^* \mid 0 \leq k \leq m\}$,

(c) $L_d = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$,

(d) $L_e = \{\phi \in \{p, q, r, \neg, \wedge, (,)\}^* \mid \phi \text{ is een propositionele formule}\}$,

(e) $L_a = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$.

Hier is $\overleftarrow{w}$ het woord verkregen door de volgorde van de symbolen in w om te keren.

Opgave 20 Ga na of de volgende talen regulier zijn of niet:

(a) $L_a = \{vwv \mid v, w \in \{a,b\}^* \text{ en } |v| = 2\}$,

(b) $L_b = \{vwv \mid v, w \in \{a,b\}^*\}$,

(c) $L_c = \{a^k b^m \mid 0 \leq k \leq m \text{ en } m \leq 100\}$,

(d) $L_d = \{a^k b^m \mid 0 \leq k \leq m \text{ en } k \leq 100\}$,

(e) $L_e = \{a^k b^m \mid 0 \leq k \leq m\}$.

Opgave 21 Beschouw de volgende redenering:

> Gegeven is de taal $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$.
> Stel dat L regulier is. Dan bestaat er een getal ℓ zó dat ieder woord uit L van lengte ℓ of groter ℓ-opgepompt kan worden. Beschouw nu de string $z = ab^\ell ab^\ell$; dit woord behoort tot L en is langer dan ℓ. Kies nu $u = \epsilon$, $v = a$ en $w = b^\ell ab^\ell$. Er geldt $uv^0w = uw = b^\ell ab^\ell$, $uv^2w = uvvw = aab^\ell ab^\ell$, $uv^3w = aaab^\ell ab^\ell$, enzovoort. Geen van deze woorden behoort tot L. Maar als L regulier was, zou dit wel het geval moeten zijn. We hebben dus een tegenspraak afgeleid.
> L is dus niet regulier.

(a) Wat is er fout aan deze redenering?

(b) Is de conclusie op zich wel gerechtvaardigd? Dat wil zeggen, klopt het dat L niet regulier is?

Opgave 22 (a) Laat zien dat de klasse $\mathcal{R}$ van reguliere talen gesloten is onder het nemen van doorsnedes, zonder gebruik te maken van andere afsluitingseigenschappen.

(b) Heeft uw constructie uit (a) voordelen boven het bewijs dat gebruik maakt van het feit dat $\mathcal{R}$ gesloten is onder het nemen van complement en vereniging?

Opgave 23 In deze opgave wordt u gevraagd om twee verschillende bewijzen te geven voor het feit dat $\mathcal{R}$ gesloten is onder het nemen van omkeringen.

(a) Gegeven is een NEA $\mathbb{A}$. Construeer een NEA $\overleftarrow{\mathbb{A}}$ zodanig dat $L(\overleftarrow{\mathbb{A}}) = \overleftarrow{(L(\mathbb{A}))}$.

(b) Geef, zonder gebruik te maken van automaten, een operatie die een reguliere expressie r afbeeldt op een reguliere expressie $\overleftarrow{r}$ waarvoor geldt dat $L(\overleftarrow{r}) = \overleftarrow{(L(r))}$.

Opgave 24 Gegeven is een reguliere taal L over $\{a,b,c\}$. Ga na of de volgende talen regulier zijn:

(a) $L_1 = \{w \in L \mid |w| \text{ is even}\}$,

(b) $L/a = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid wa \in L\}$,

(c) $L{:}3 = \{w{:}3 \in \{a, b, c\}^* \mid w \in L\}$; hier is $w{:}3$ het woord dat je krijgt door het derde, zesde, negende, enz. symbool van w te nemen.
(Preciezer gedefinieerd: als $w = a_1a_2 \ldots a_{3n+k}$ met $k \in \{0, 1, 2\}$, dan is $w{:}3$ het woord $a_3a_6 \ldots a_{3n}$.)

(d) $\min(L) = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ zit in L, maar geen enkel echt beginstuk van w zit in $L\}$,

(e) $\text{init}(L) = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid wx \in L$ voor zeker woord $x\}$.

Opgave 25 Als $\mathbb{A} = (Q, q_0, \Sigma, \Delta, F)$ een niet-deterministische eindige automaat is, definieer dan de automaat $\overline{\mathbb{A}} := (Q, q_0, \Sigma, \Delta, Q \setminus F)$.

(a) Geef een voorbeeld van een NEA $\mathbb{A}$ zodanig dat $L(\mathbb{A}) \cap L(\overline{\mathbb{A}}) \neq \varnothing$.

(b) Geldt wel voor elke NEA dat $L(\mathbb{A}) \cup L(\overline{\mathbb{A}}) = \Sigma^*$?

(c) Leg uit waarom voor een DEA wel geldt dat $L(\mathbb{A}) = \Sigma^* \setminus L(\overline{\mathbb{A}})$.

Opgave 26 Geef een algoritme die van een gegeven reguliere expressie r beslist of $L(r)$ leeg is of niet, *zonder* een automaat te construeren.

Opgave 27 Geef een algoritme die een gegeven ϵ-NEA $\mathbb{A}$ transformeert naar een equivalente NEA $\mathbb{A}'$. De algoritme dient in polynomiale tijd te termineren en de toestanden van $\mathbb{A}'$ moeten dezelfde zijn als die van $\mathbb{A}$.

Opgave 28 Geef voor de onderstaande talen context-vrije grammatica's.

1. $\{0^n1^n \mid n \geq 1\}$,
2. $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(w) = 2 \times \#_1(w)\}$,
3. $\{a^ib^jc^k \mid i \neq j \text{ of } j \neq k\}$.

Opgave 29 De onderstaande grammatica genereert de taal van de reguliere expressie $0^*1(0 + 1)^*$:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A1B \\ A & \to & 0A \mid \varepsilon \\ B & \to & 0B \mid 1B \mid \varepsilon \end{array}$$

Geef left- en rightmost afleidingen van de volgende strings.

1. 00101,
2. 1001,
3. 00011.

Opgave 30 Geef een CFG met de terminale symbolen $T = \{0, 1, (,), +, ^*, \emptyset, e\}$ die precies de taal van de reguliere expressies over het alfabet $\{0, 1\}$ genereert. Om verwarring te voorkomen hebben we e in plaats van ε gebruikt.

Opgave 31 Beschouw de onderstaande CFG G met productieregels

$$S \to aS \mid Sb \mid a \mid b$$

1. Bewijs met inductie naar de lengte van w dat geen woord $w \in L(G)$ een substring van de vorm ba heeft.
2. Beschrijf $L(G)$.

Opgave 32 Beschouw de onderstaande CFG G met productieregels

$$S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$$

Bewijs dat $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$.

Opgave 33 Beschouw de verzameling van alle welgevormde woorden over het alfabet $\{[, (,],)\}$. Dit speelt b.v. een rol bij expressies die gebruik maken van functie-aanroepen, groeperingen en array-indices. Uitgaande van de welgevormde expressie

$$f(a[i] \times (b[i][j], c[g(x)]), d[i])$$

verkrijgt men dan het welgevormde 'skelet'

$$([\,](\,[\,][\,][(\,)]\,)[\,])$$

Ontwerp een grammatica die precies alle welgevormde 'skeletten' genereert.

Opgave 34 Geef parseerbomen voor de grammatica en elk van de woorden in Opgave 29.

Opgave 35 Beschouw de grammatica

$$S \to aS \mid aSbS \mid \varepsilon$$

Deze grammatica is ambigu. Laat zien dat het woord aab

1. 2 parseerbomen,
2. 2 leftmost afleidingen, en
3. 2 rightmost afleidingen

heeft.

Opgave 36 Geef een niet ambigue CFG voor de grammatica in Opgave 35.

Opgave 37 Bewijs dat de grammatica in Opgave 29 niet ambigu is.

Opgave 38 De PDA $P = (\{q, p\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ heeft de volgende transitie-functie:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\delta(q, 0, Z_0) & = & \{(q, XZ_0)\} & \quad & \delta(q, 0, X) & = & \{(q, XX)\} \\
\delta(q, 1, X) & = & \{(q, X)\} & & \delta(q, \varepsilon, X) & = & \{(p, \varepsilon)\} \\
\delta(p, \varepsilon, X) & = & \{(p, \varepsilon)\} & & \delta(p, 1, X) & = & \{(p, XX)\} \\
\delta(q, 1, Z_0) & = & \{(p, \varepsilon)\}. & & & &
\end{array}$$

Geef alle ID's die vanuit de initiële ID met de volgende input bereikbaar zijn:

1. 01,
2. 0011, en
3. 010.

Opgave 39 Ontwerp een PDA die de volgende talen accepteert. Acceptatie kan plaatsvinden m.b.v. eindtoestanden of de lege stapel.

1. $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$,
2. $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ of } j = k\}$ (Merk op, deze taal verschilt van de taal gegeven in Opgave 28.3.)

Opgave 40 De PDA $P = (\{q_0, q_1, q_2, , q_3, f\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{f\})$ heeft de volgende transitie-functie:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
\delta(q_0, a, Z_0) & = & \{(q_1, AAZ_0)\} & \quad & \delta(q_0, b, Z_0) & = & \{(q_2, BZ_0)\} & \quad & \delta(q_0, \varepsilon, Z_0) & = & (f, \varepsilon) \\
\delta(q_1, a, A) & = & \{(q_1, AAA)\} & & \delta(q_1, b, A) & = & \{(q_1, \varepsilon)\} & & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) & = & (q_0, Z_0) \\
\delta(q_2, a, B) & = & \{(q_3, \varepsilon)\} & & \delta(q_2, b, B) & = & \{(q_2, BB)\} & & \delta(q_2, \varepsilon, Z_0) & = & (q_0, Z_0) \\
\delta(q_3, \varepsilon, B) & = & \{(q_2, \varepsilon)\} & & \delta(q_3, \varepsilon, Z_0) & = & (q_1, AZ_0) & & & &
\end{array}$$

1. Laat zien dat $bab \in L(P)$.
2. Laat zien dat $abb \in L(P)$.
3. Geef de inhoud van de stapel na de input $b^7 a^4$.
4. Beschrijf $L(P)$.

Opgave 41 Beschouw nog een keer de PDA P van Opgave 38.

1. Converteer P naar een PDA P' die de taal $L(P)$ m.b.v. de lege stapel accepteert, d.w.z. $N(P') = L(P)$.
2. Geef een PDA P'' die de taal, die P m.b.v. de lege stapel accepteert, m.b.v. eindtoestanden accepteert, d.w.z. $P(P'') = N(P)$.

Opgave 42 Geef voor ieder van de onderstaande grammatica's een PDA die dezelfde taal met de lege stapel accepteert.

1.
$$\begin{array}{lcl} S & \to & 0S1 \mid A \\ A & \to & 1A0 \mid S \mid \varepsilon \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lcl} S & \to & aAA \\ A & \to & aS \mid bs \mid a \end{array}$$

Opgave 43 Geef voor de PDA in Opgave 38 een context-vrije grammatica.

Opgave 44 Geef DPDA's voor ieder van de onderstaande talen:

1. $\{0^n1^m \mid 0 < n \leq m\}$,
2. $\{0^n1^m \mid n \geq m > 0\}$,
3. $\{0^n1^m0^n \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Opgave 45 Voer de volgende stappen uit voor ieder van de onderstaande grammatica's:

- verwijder alle ε-producties,
- verwijder alle unit-producties in de resulterende grammatica,
- verwijder alle nutteloze symbolen in de resulterende grammatica, en tenslotte
- geef een Chomsky-normaalvorm voor de resulterende grammatica.

1.
$$\begin{array}{lcl} S & \to & ASB \mid \varepsilon \\ A & \to & aAS \mid a \\ B & \to & SbS \mid A \mid bb \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lcl} S & \to & 0A0 \mid 1B1 \mid BB \\ A & \to & C \\ B & \to & S \mid A \\ C & \to & S \mid \varepsilon \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{lcl} S & \to & AAA \mid B \\ A & \to & aA \mid B \\ B & \to & \varepsilon \end{array}$$

Opgave 46 Laat zien dat de volgende talen niet context-vrij zijn:

1. $\{a^ib^jc^k \mid i < j < k\}$,
2. $\{a^nb^nc^i \mid i \leq n\}$,

3. $\{0^p \mid p \text{ priem}\}$,
4. $\{0^i 1^j \mid j = i^2\}$,
5. $\{a^n b^n c^i \mid n \leq i \leq 2n\}$,
6. $\{ww^R w \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

Opgave 47 Beschouw de onderstaande talen.

$$\begin{array}{lcl} L_1 & = & \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\} \\ L_2 & = & \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \geq 0\} \end{array}$$

1. Laat zien dat deze 2 talen context-vrij zijn.
2. Is $L_1 \cap L_2$ context-vrij? Beargumenteer!

Opgave 48 Bewijs dat de klasse van context-vrije talen niet gesloten is onder de volgende operaties.

1. $min(L) = \{w \mid w \in L,$ maar voor geen echte prefix v van w geldt $v \in L\}$,
2. $max(L) = \{w \mid w \in L,$ maar voor geen niet-leeg woord v geldt $wv \in L\}$,
3. $half(L) = \{w \mid$ er bestaat een woord v met $\mid v \mid = \mid w \mid$ en $wv \in L\}$.